Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Théme : Suites réelles

Suite et comparaison

Exercice :

Soit la suite (u_n) définie sur IN^* par $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

1°) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

2°) a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

b) Que peut-on conjecturer sur $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$?

.) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

1°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$

$0 < n^2+1 \leq n^2+k \leq n^2+n$

$\Rightarrow \sqrt{n^2+1} \leq \sqrt{n^2+k} \leq \sqrt{n^2+n}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}}$$

2)a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \boxed{1}$ ($\frac{1}{n} \to 0$)

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \boxed{1}$ ($\frac{1}{n^2} \to 0$)

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$

D'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$

a) $u_n \leq v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

b) $u_n \leq v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$